I. 以下の問いに答えなさい。

(i) 2つの正の実数x, yについて，$xy^2 = 10$ のとき，$\log_{10} x \cdot \log_{10} y$の最大値は $\dfrac{\boxed{(1)}}{\boxed{(2)}}$ である。

(ii) xy平面上において，点$(4, 3)$を中心とする半径1の円と直線$y = mx$が共有点を持つとき，定数mのとり得る最大値は

$$\frac{\boxed{(3)}}{\boxed{(4)}} + \frac{\boxed{(5)}\sqrt{\boxed{(6)}}}{\boxed{(7)\ \vdots\ (8)}}$$

である。

(iii) 1辺の長さが2の正四面体ABCDにおいて，辺BDの中点をM，辺CDの中点をNとする。また辺AD上に点Lを定め，DL$= x$とする。このとき，△LMNの面積が△ABCの面積の$\dfrac{1}{3}$になるのは

$$x = \frac{\boxed{(9)}}{\boxed{(10)}} + \frac{\sqrt{\boxed{(11)\ \vdots\ (12)}}}{\boxed{(13)}}$$

のときである。

II. $a>0,\ b<0$ とする。放物線 C : $y=\dfrac{3}{2}x^2$ 上の点 $\mathrm{A}\left(a,\dfrac{3}{2}a^2\right)$ と点 $\mathrm{B}\left(b,\dfrac{3}{2}b^2\right)$ について，点Aと点Bにおける放物線の接線をそれぞれ ℓ と m で表し，その交点をPとする。

(i) ℓ と m が直交するとき，交点Pの y 座標は $-\dfrac{\boxed{(14)}}{\boxed{(15)}}$ である。

(ii) $a=2$ で，$\angle\mathrm{APB}=\dfrac{\pi}{4}$ とする。このとき，b の値は $-\dfrac{\boxed{(16)}}{\boxed{(17)\,(18)}}$ である。

(iii) $b=-a$ で，$\angle\mathrm{APB}=\dfrac{\pi}{3}$ とする。このとき，a の値は $\dfrac{\sqrt{\boxed{(19)}}}{\boxed{(20)}}$ である。

またPAを半径，$\angle\mathrm{APB}$ を中心角として扇形PABが定まる。この扇形は放物線 C によって2つの図形に分割され，大きい図形の面積と小さい図形の面積の差は

$$\frac{\boxed{(21)}}{\boxed{(22)}}\pi-\frac{\boxed{(23)}\sqrt{\boxed{(24)}}}{\boxed{(25)}}$$

である。

III. 平面上に3点O, P_1, P_2が, $\left|\overrightarrow{OP_1}\right| = \sqrt{6}$, $\left|\overrightarrow{OP_2}\right| = \dfrac{\sqrt{30}}{5}$, $\overrightarrow{OP_1} \perp \overrightarrow{OP_2}$ となるように与えられている。また，点Oから直線P_1P_2に引いた垂線と直線P_1P_2との交点をHとする。

さらに平面上に点P_3, P_4, P_5, …… を，$n = 1, 2, 3, \cdots\cdots$ に対し，点P_{n+2}が点P_nと点P_{n+1}を結ぶ線分P_nP_{n+1}を$4:1$に内分するように定める。

(i) $\overrightarrow{OP_1}$ と $\overrightarrow{OP_2}$ を使って，$\overrightarrow{OH}$ を表すと

$$\overrightarrow{OH} = \boxed{\quad（ア）\quad}$$

である。

(ii) $\overrightarrow{P_1P_2}$ を使って，$\overrightarrow{HP_n}$ をnを用いた式で表すと

$$\overrightarrow{HP_n} = \boxed{\quad（イ）\quad}$$

である。

(iii) **ベクトルを使わずに，** $\left|\overrightarrow{OP_n}\right|^2$ をnを用いた式で表すと

$$\left|\overrightarrow{OP_n}\right|^2 = \boxed{\quad（ウ）\quad}$$

である。

IV. 太郎は15個の球を，花子は21個の球を持っている。ここから始めて，次の手順による球のやり取りを，2人の間で繰り返す。

> 【1】2個のさいころを同時に投げる。
>
> 【2】 ① 2個とも奇数の目が出たら，太郎が花子に1個の球を渡す。
>
> ② 2個とも偶数の目が出たら，太郎が花子に2個の球を渡す。
>
> ③ 奇数の目と偶数の目が1個ずつ出たら，花子が太郎に3個の球を渡す。

この手順【1】,【2】によるやり取りを，7回繰り返す。その結果，太郎と花子が持つ球の個数について，以下の問いに答えなさい。

(i) 太郎と花子が同数の球を持っている確率は

$$\frac{\boxed{(26)}\boxed{(27)}\boxed{(28)}}{\boxed{(29)}\boxed{(30)}\boxed{(31)}\boxed{(32)}}$$

である。

(ii) 持っている球の数が，太郎と花子の2人とも最初と変わらない確率は

$$\frac{\boxed{(33)}\boxed{(34)}\boxed{(35)}}{\boxed{(36)}\boxed{(37)}\boxed{(38)}\boxed{(39)}}$$

である。

(iii) 太郎が持っている球の数が，花子が持っている球の数の半分である確率は

$$\frac{\boxed{(40)}\boxed{(41)}\boxed{(42)}}{\boxed{(43)}\boxed{(44)}\boxed{(45)}\boxed{(46)}}$$

である。